ÉCOLE NAVALE

Concours 1984

Deuxième composition de mathématiques

Tous les repères envisagés sont orthonormés et directs.

L'espace affine euclidien de dimension trois, dans lequel on travaille est rapporté au repère $\mathcal{R}_0 = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$; soit par ailleurs le repère $\mathcal{R}_1 = (A, \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ défini par :

$$\overrightarrow{OA} = x\vec{i}, \quad \vec{I} = \vec{i}, \quad (\vec{j}, \vec{J}) = \theta,$$

x et θ étant des fonctions dérivables du paramètre réel t appelé temps, nulles lorsque $t = 0$. Soit enfin le repère $\mathcal{R}_2 = (B, \vec{U}, \vec{V}, \vec{W})$ défini par :

$$\overrightarrow{AB} = a\vec{J}, \quad \vec{K} = \vec{W}, \quad (\vec{I}, \vec{U}) = \varphi,$$

a étant une constante réelle strictement positive et φ une fonction dérivable de t, s'annulant pour $t = 0$.

— *Préliminaire :* Soit M le point lié à $\mathcal{R}_2$ et coïncidant avec le point A à la date t; en notant $\vec{V}(M/\mathcal{R}_0)$ la vitesse de ce point M à la date t, par rapport à $\mathcal{R}_0$, établir que l'on a :

$$\vec{V}(M/\mathcal{R}_0) = \left(\frac{dx}{dt} + a\frac{d\varphi}{dt}\right)\vec{i}.$$

On suppose, dans toute la suite du problème, que :

$$\vec{V}(M/\mathcal{R}_0) = \vec{0}, \quad \forall t \geq 0;$$

exprimer x en fonction de φ et de a.

1° Soit P le point lié à $\mathcal{R}_2$ et coïncidant avec le point O à la date $t = 0$, on pose :

$$\overrightarrow{BP} = X_1\vec{U} + Y_1\vec{V} + Z_1\vec{W}.$$

1° *a)* Exprimer X_1, Y_1 et Z_1 en fonction de a seulement.

1° *b)* On écrit aussi :

$$\overrightarrow{OP} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k},$$

exprimer x_1, y_1 et z_1 en fonction de a, θ et φ uniquement.

1° *c)* On suppose, dans cette question, que $\forall t \geq 0, \quad \varphi = \theta$,

expliciter y_1 et z_1 en fonction de a et de θ, construire la courbe (C_1), projection orthogonale de la trajectoire de P sur le plan $(O, \vec{j}, \vec{k})$.

1° *d)* On impose, dans cette question, $\forall t \geq 0, \quad \varphi = 2\theta$,

construire la courbe (C_2), projection orthogonale de la trajectoire de P sur le plan $(O, \vec{j}, \vec{k})$, calculer l'aire limitée par une des boucles de (C_2) ainsi que la longueur d'une des boucles de (C_2).

1° *e)* Enfin, on fixe dans cette question, $\forall t \geq 0, \quad \varphi = 3\theta$,

construire la courbe (C_3), projection orthogonale de la trajectoire de P sur le plan $(O, \vec{j}, \vec{k})$.

2°) Soit Q le point lié à $\mathcal{R}_2$ et défini par :

$$\overrightarrow{BQ} = a\vec{W},$$

et *on suppose, jusqu'à la fin du problème*, que, $\forall t \geq 0$,

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{d\theta}{dt}.$$

2° *a)* Montrer que la trajectoire (C) de Q dans $\mathcal{R}_0$ est tracée sur un cylindre de révolution (H) dont on précisera l'axe et le rayon r.

2° *b)* Déterminer l'angle que fait la tangente à la trajectoire (C) de Q avec l'axe du cylindre (H).

Que peut-on dire de (C) ?

2° *c)* A une date t fixée, strictement positive, calculer les valeurs des rayons de courbure R et de torsion τ de (C) en Q. Quelle est la valeur du rapport

$$\sigma = \frac{R}{\tau} ?$$

3°) On suppose maintenant qu'un solide (Λ) est lié à $\mathcal{R}_2$.

3° *a)* Écrire les éléments de réduction en B du torseur cinématique associé au mouvement de (Λ) par rapport à $\mathcal{R}_0$; ces éléments seront exprimés dans la base $\{\vec{U}, \vec{V}, \vec{W}\}$. Déterminer, dans $\mathcal{R}_2$ les équations paramétriques de l'axe de rotation et de glissement instantanés (Δ) du mouvement de (Λ) par rapport à $\mathcal{R}_0$. Soit (Σ) la surface engendrée par (Δ) dans $\mathcal{R}_2$ lorsque t varie, écrire l'équation cartésienne de (Σ) et préciser sa nature.

3° *b)* Écrire les éléments de réduction en B du torseur cinématique associé au mouvement de (Λ) par rapport à $\mathcal{R}_0$, ces éléments seront exprimés dans la base $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$. Donner, dans $\mathcal{R}_0$ les équations paramétriques de l'axe de rotation et de glissement instantanés (Δ) du mouvement de (Λ) par rapport à $\mathcal{R}_0$.

Nature du torseur cinématique ?